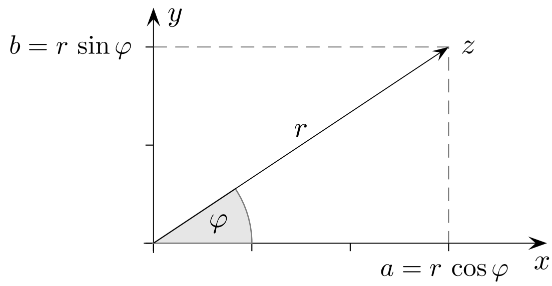
Die komplexe Ebene

Jeder komplexen Zahl $z = [a, b]$ kann in einem xy-Koordinatensystem eindeutig ein Punkt mit den Koordinaten

$$a = Re[z], \quad b = Im[z]$$

zugeordnet werden. Der Ursprung entspricht z. B. der komplexen Zahl $z = 0$.
Die Ebene selbst heißt dann *komplexe Ebene*.



Um z.B. Gleichungen wie $z^5 = 1$ zu lösen, wird die Darstellung von z in Polarkoordinaten untersucht. r sei der Abstand des Punktes z vom Ursprung, φ sei der Winkel, den die positive x-Achse mit dem Pfeil vom Ursprung zum Punkt z einschließt. r heißt der Betrag der komplexen Zahl, symbolisch $r = |\, z \,|$. Der Polarwinkel φ ist für jede Zahl $z \neq 0$ bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 360° eindeutig bestimmt und heißt das *Argument* der komplexen Zahl, symbolisch $\varphi = arg\, z$.
Nach Definition der Sinus- und Kosinusfunktion ist

$$\begin{aligned} a &= r \cdot \cos\varphi \\ b &= r \cdot \sin\varphi \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$z = a + b \cdot i = r\,(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

Diese Darstellung heißt die *Polarform der komplexen Zahl*.
Es gilt:

$$\tan\varphi = \frac{b}{a} \quad \text{und} \quad r = |\, z \,| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Für zwei komplexe Zahlen $z_1 = r_1\,(\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)$ und $z_2 = r_2\,(\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)$ ergibt sich unter Berücksichtigung der Additionstheoreme der Sinus- und der Kosinusfunktion

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2\,((\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i \cdot (\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2)) \\ &= r_1 \cdot r_2\,(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot (\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen bedeutet also die Multiplikation ihrer Beträge und die Addition ihrer Argumente. Damit erhalten wir:

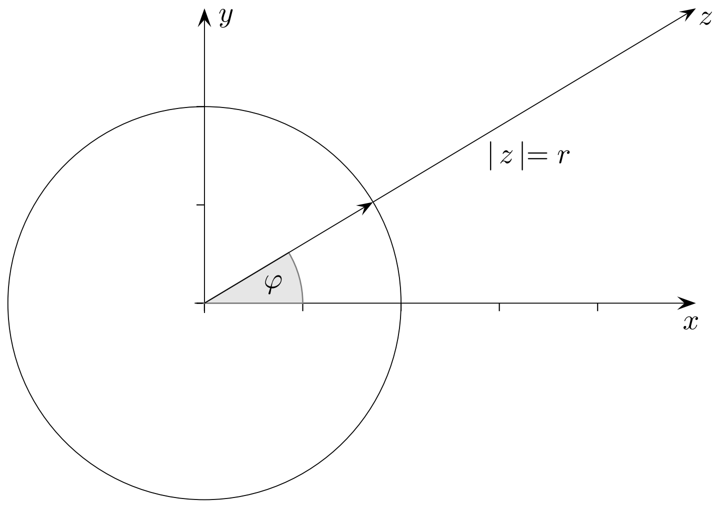
$$\begin{aligned} z &= r\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi) \\ z^2 &= r^2\,[\cos(\varphi + \varphi) + i\,\sin(\varphi + \varphi)] = r^2\,[\cos(2\,\varphi) + i\,\sin(2\,\varphi)] \\ z^3 &= z^2 z = r^2 r\,[\cos(2\,\varphi + \varphi) + i\,\sin(2\,\varphi + \varphi)] = r^3\,[\cos(3\,\varphi) + i\,\sin(3\,\varphi)] \end{aligned}$$

Dies ergibt die *Formel von Moivre (1667-1754).*
Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)]^n = r^n\,[\cos(n\,\varphi) + i\,\sin(n\,\varphi)]$$

Formel von Moivre (ohne Additionstheoreme)

Die Polarform $z = r\,(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$, abgekürzt $z = r\angle\varphi$, beinhaltet, dass die Zahl $\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi$ auf dem Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ mit r multipliziert werden muss, um z zu erhalten.



Die Multiplikation mit einer komplexen Zahl z stellt in der Ebene eine Drehstreckung dar (siehe Veranschaulichung der Multiplikation):

$$z_1 = r_1\angle\varphi_1,\quad z_2 = r_2\angle\varphi_2 \quad\Longrightarrow\quad z_1\cdot z_2 = r_1\cdot r_2\angle\varphi_1+\varphi_2$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} z &= r\,(\cos\varphi + i\ \sin\varphi) \\ z^2 &= r^2\,[\cos(\varphi+\varphi) + i\ \sin(\varphi+\varphi)] = r^2\,[\cos(2\,\varphi) + i\ \sin(2\,\varphi)] \end{aligned}$$

Dies ergibt unmittelbar die *Formel von Moivre (1667-1754).*
Für $n\in\mathbb{N}$ gilt:

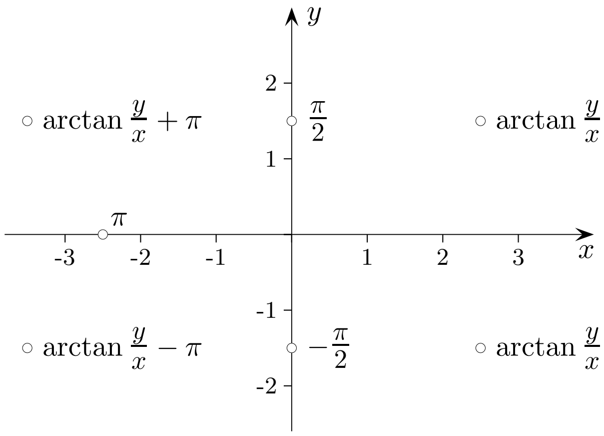
$$z^n = [r(\cos\varphi + i\ \sin\varphi)]^n = r^n\,[\cos(n\,\varphi) + i\ \sin(n\,\varphi)]$$

Umrechnung in Polarkoordinaten

Gegeben (x, y) (oder $z = x + yi$)
gesucht (r, φ)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & x > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & x < 0\,, \quad y \geq 0 \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi & x < 0\,, \quad y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0\,, \quad y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0\,, \quad y < 0 \end{cases}$$



Tipp:
$\tan \varphi = \frac{y}{x}$ besitzt neben φ_1 auch $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$ als Lösung (tan hat die Periode π).
Nun ist von φ_1, φ_2 derjenige Winkel zu wählen, der zum Quadranten von (x, y) passt.