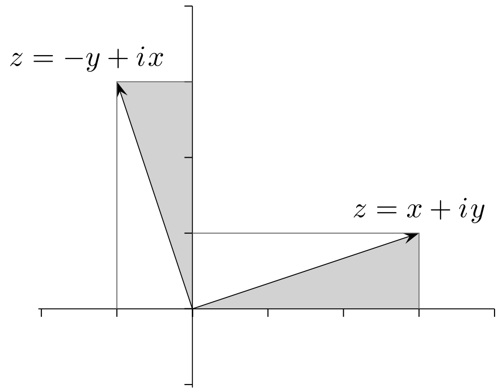
Veranschaulichung der komplexen Multiplikation

Die Multiplikation komplexer Zahlen kann veranschaulicht werden.
Betrachten wir zunächst die Multiplikation einer Zahl z mit i.

$$zi = (x + iy)\,i = -y + ix$$

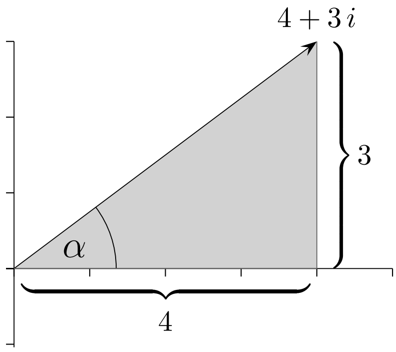
Aus der nebenstehenden Zeichung ist zu entnehmen,
dass dies einer Drehung von z um 90° entspricht.

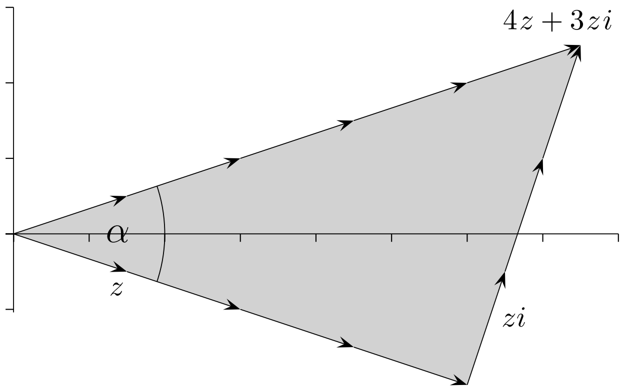


Um den allgemeinen Zusammenhang zu erkennen, multiplizieren wir eine komplexe Zahl z mit $4 + 3i$

$$z(4 + 3i) = 4z + 3zi$$

und sehen uns in der Zeichnung das Zustandekommen von $4z + 3zi$ an.





Die beiden Dreiecke sind ähnlich.
Das rechte Dreieck hat die Seitenlängen $4\,|z|,\ 3\,|z|$ und $|4 + 3i||z| \quad (= 5\,|z|)$.
Durch die Multiplikation mit $4 + 3\,i$ wird z um α gedreht und um 5 gestreckt.

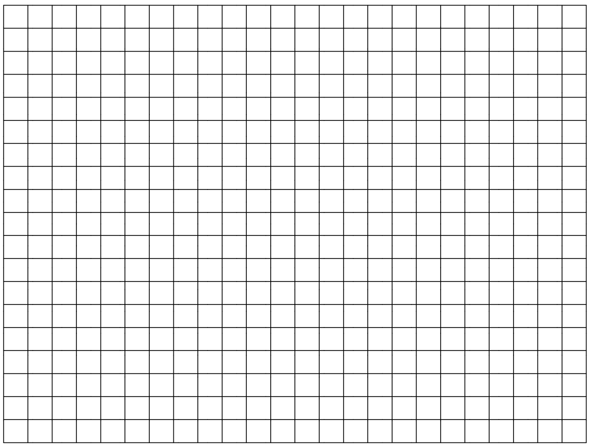
Aufg.

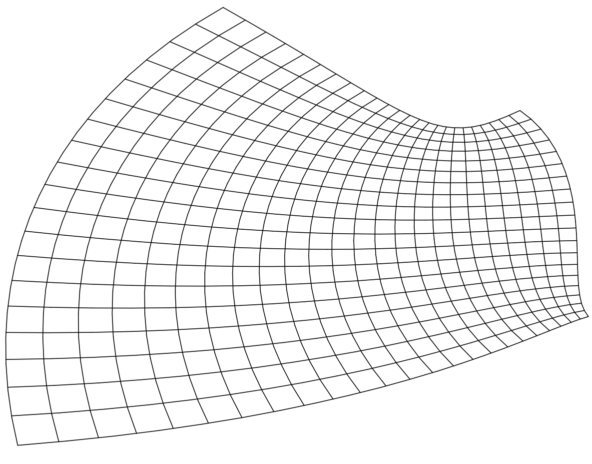
Formuliere das Ergebnis allgemein.

Anwendung auf differenzierbare Funktionen

Eine komplexe differenzierbare (analytische) Funktion ist lokal eine Drehstreckung, alle komplexen Zahlen $z_1 - z_0$, die von einem Punkt z_0 ausgehen, werden um dengleichen Betrag gestreckt und gedreht.

$$\begin{aligned} f'(z_0) &\approx \frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0} \\ f(z_1) - f(z_0) &\approx f'(z_0) \cdot (z_1 - z_0) \end{aligned}$$





Aufg.

Zeichne in die Grafiken eine mögliche Lage von z_0, z_1, $f(z_0)$ und $f(z_1)$ ein.

Beschreibe die Abbildung von kleinen Quadraten durch eine analytische Funktion.